STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 9 - Itô stochastic integral

Lecturer: Weichen Zhao Fall 2025

Key concepts:

- *Itô* 积分。

9.1 背景

动机. 为什么需要定义随机积分？

历史上，概率学者们想要构造具有给定无穷小生成元的 Markov 过程，尤其是具有连续轨道的 Markov 过程——扩散过程 (Diffusion Process)，Itô 没有考虑构造转移函数，而是直接构造过程的样本轨道，在这一过程中发展了随机积分和随机微分方程。

我们在对世界的随机性有了一定认识之后，随机积分的建立是我们对随机现象建模的需要。考虑一个微分方程ODEs，它刻画了系统随时间的演化

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t), \quad X_0 = x_0.$$

实际生活中，很多时候需要考虑到有随机因素的干扰，我们希望在系统中引入随机扰动

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t) + \sigma(X_t)\xi_t, \quad X_0 = x_0$$

其中，理想的情况下噪声 ξ_t 应该是一个连续平稳的随机过程，满足：

(1) 若 $t_1 \neq t_2$ 那么 ξ_{t_1} 和 ξ_{t_2} 是独立的;

(2) 对于所有 t, $\mathbb{E}[\xi_t] = 0$.

但是这样的过程是不存在的，满足平稳性和(1)(2)的过程不可能是连续的 (Exercise 3.11 in Oksendal B. Stochastic differential equations: an introduction with applications[M]. Springer Science & Business Media, 2013)

我们换个角度，从积分方程出发来定义：

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s,$$

其中B_t为一个布朗运动，也就是我们需要定义随机积分

$$\int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

历史上，虽然布朗运动是连续的，但它是处处不可微的，这使得经典微积分中的积分和微分理论难以直接应用于这种过程。伊藤清意识到，需要一种新的数学工具来对布朗运动及其相关过程进行精确描述和计算。下面回顾经典的RS积分：

Riemman-Stieltjes 积分. 考虑时间区间 $[0, T]$的一个划分：

$$\tau_n : 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k_n-1}^{(n)} < t_{k_n}^{(n)} = T$$

和中间点序列

$$\sigma_n : t_i^{(n)} \leq s_i^{(n)} \leq t_{i+1}^{(n)}, \quad i = 0, ..., k_n - 1,$$

令 f 和 g 是$[0, T]$上两个函数，那么*Riemann-Stieltjes*和定义为

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} f(s_i^{(n)})(g(t_{i+1}^{(n)}) - g(t_i^{(n)}))$$

如果

$$\|\pi_n\| \triangleq \max_{i=1,\ldots,k_n} \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Riemann-Stieltjes积分定义为

$$\int_0^T f dg \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} f(s_i^{(n)})(g(t_{i+1}^{(n)}) - g(t_i^{(n)})),$$

RS积分$\int_0^T f dg$对任意$[0, T]$上函数f存在的一个充要条件是函数 g有界变差，即

$$\sup_{\tau_n} \sum_i |g(t_{i+1}^{(n)}) - g(t_i^{(n)})| < \infty.$$

但不幸的是我们知道以概率1，布朗运动的样本轨道在任意有限区间上的一次变差都是无限的，也就是说，对于连续随机过程$X = \{X_t\}_{0\leq t\leq T}$，RS积分

$$\int_0^T X_t(\omega)dB_t(\omega)$$

以概率1不存在，所以无法固定 ω，通过推广RS积分来定义随机积分。Itô的出发点是对被积过程考虑一些概率的性质。

9.2 Itô 随机积分

Itô 发现适应性是可以定义随机积分的被积过程的本质特性。

Itô 定义随机积分的思想在数学中是自然的：先对一类非常简单的过程H定义对布朗运动的积分$\int HdB$，然后复杂的过程X可以通过简单的H逼近，我们就定义

$$\int XdB \triangleq \lim_{H\to X}\int HdB$$

从而定义随机积分。

考虑带滤子流的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathrm{P})$，$B_t$ 为一个 $\mathscr{F}_t$-适应布朗运动，X_t 为一个 $\mathscr{F}_t$适应过程。考虑下面定义的适应过程集合：

Definition 9.1 设$\mathscr{L}_T^2$ 是$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathrm{P})$上平方可积的 $\mathscr{F}_t$ 适应过程的集合，即一族适应过程$X=(X_t)$，$t\in[0,T]$ 满足

$$\|X\|_{L^2}^2 \triangleq \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t(\omega)|^2\,\mathrm{d}t\right] < \infty.$$

注. 我们可以验证$\mathscr{L}_T^2$有以下数学结构：

(1) $\mathscr{L}_T^2$ 为一个线性空间；

(2) $\mathscr{L}_T^2$具有内积

$$\langle\phi,\psi\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\phi_t(\omega)\psi_t(\omega))\mathrm{d}t\right],\quad \phi,\psi\in\mathscr{L}_T^2$$

(3) $\mathscr{L}_T^2$ 是个完备度量空间

$$\|\phi-\psi\|_{L^2}=\left(\mathbb{E}\int_0^T |\phi_t-\psi_t|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

这即是说$\mathscr{L}_T^2$是一个Hilbert空间。

Definition 9.2 (简单阶梯过程) 我们称 $H_t \in \mathscr{L}_T^2$ 为一个简单阶梯过程*(Simple step process)*，如果它是如下形式

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) + H_{t_0}(\omega)\mathbf{1}_0(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{9.1}$$

其中$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$，并且 $H_{t_i}(\omega)$是 $\mathscr{F}_{t_i}$-可测有界随机变量。记所有简单阶梯过程的集合为$\mathscr{L}_0$。

Lemma 9.3 对所有$H_t \in \mathscr{L}_T^2$，存在一个简单阶梯过程序列 $H_t^{(n)}$，$n \ge 1$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t - H_t^{(n)}\right|^2 \mathrm{d}t\right] = \lim_{n\to\infty} \left\|H - H^{(n)}\right\|_{L^2}^2 = 0. \tag{9.2}$$

Proof: Oksendal B. Stochastic differential equations: an introduction with applications[M]. Fifth Edition. P27-P28 Step1-Step3 ∎

注. 在度量$\|\cdot\|_{L^2}$下，$\mathscr{L}_0$是$\mathscr{L}_T^2$的稠密子空间。

Definition 9.4 (简单阶梯过程的Itô积分) 简单阶梯过程

$$H_t \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(\omega)\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) + H_0(\omega)\mathbf{1}_0(t), \quad 0 \le t \le T,$$

的*Itô*积分定义为

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}B_t \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(\omega)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

下面是我们定义的简单阶梯过程的Itô积分的基本性质。

Proposition 9.5 对于 $H, G \in \mathscr{L}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$:

(1) (Mean zero) $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_t \mathrm{d}B_t\right] = 0$;

(2) (Itô isometry) $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t \mathrm{d}B_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_t|^2 \mathrm{d}t\right]$;

(3) (Linearity) $\int_0^T (aH_t + bG_t)\mathrm{d}B_t = a\int_0^T H_t \mathrm{d}B_t + b\int_0^T G_t \mathrm{d}B_t$.

Proof: (1)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_t \mathrm{d}B_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right].$$

注意到 H_{t_i} 为 $\mathscr{F}_{t_i}$ 可测，故 H_{t_i} 与 $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ 独立，因此

$$RHS = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[H_{t_i}]\, \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = 0.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t \mathrm{d}B_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\Big)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + 2\sum_{j<k} H_{t_j} H_{t_k} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathscr{F}_{t_i}]\right] + 2\sum_{j<k} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H_{t_j} H_{t_k} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \mathscr{F}_{t_k}]\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[H_{t_i}^2 \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathscr{F}_{t_i}]\right] + 2\sum_{j<k} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H_{t_j} H_{t_k} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \mathscr{F}_{t_k}]\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[H_{t_i}^2 \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] + 2\sum_{j<k} \mathbb{E}\left[H_{t_j} H_{t_k} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \mathbb{E}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k} | \mathscr{F}_{t_k}]\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[H_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(H_{t_i}^2\, (t_{i+1} - t_i)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_t|^2 \,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

(3) 练习 ■

下面我们回到$\mathscr{L}_T^2$空间，对其中的过程定义关于布朗运动的Itô积分

Definition 9.6 (Itô积分) $H_t \in \mathscr{L}_T^2$ 的*Itô*积分定义为

$$\mathcal{I}_T[H] \triangleq \int_0^T H_t dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T H_t^{(n)} dB_t, \quad L^2$$

其中$H_t^{(n)}$是能逼近H_t的简单阶梯过程序列。

注. 为了这个定义是良定的，我们现在需要验证两个事情：

(1)极限的存在性；(2)极限的唯一性。

Proof: (1) 设$H_t^{(n)}$为逼近H_t的简单阶梯过程序列，那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t^{(n)}dB_t - \int_0^T H_t^{(m)}dB_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_t^{(n)} - H_t^{(m)}dB_t\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t^{(n)} - H_t^{(m)}\right|^2 dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t^{(n)} - H_t + H_t - H_t^{(m)}\right|^2 dt\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t - H_t^{(n)}\right|^2 dt\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t - H_t^{(m)}\right|^2 dt\right],
\end{aligned}$$

由于RHS中，$H_t^{(n)}$ 为逼近 H_t 的序列，所以随着 $n, m \to \infty$，RHS趋近于0，即

$$\int_0^T H_t^{(n)}dB_t$$

是柯西列，所以Itô积分定义中的极限是存在的。

(2) 设$K_t^{(n)}$和$G_t^{(n)}$为逼近H_t的任意两个简单阶梯过程序列，那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T K_t^{(n)}dB_t - \int_0^T G_t^{(n)}dB_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|K_t^{(n)} - G_t^{(n)}\right|^2 dt\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t - K_t^{(n)}\right|^2 dt\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|H_t - G_t^{(n)}\right|^2 dt\right] \\
&\longrightarrow 0, \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

唯一性得证 ■

Example 9.7 设B_t为标准布朗运动，计算$\int_0^T B_s \mathrm{d}B_s$.

考虑时间区间$[0, T]$的划分

$$\{t_i^n = \frac{iT}{n}, i = 0, 1, ..., n\}_{n\geq 1}$$

定义简单阶梯序列

$$H_t^{(n)} \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i^n} \mathbf{1}_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_0^T \left|B_t - H_t^{(n)}\right|^2 dt] &= \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left|B_t - B_{t_i^n}\right|^2 dt] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbb{E}[\left|B_t - B_{t_i^n}\right|^2] dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} t - t_i^n dt = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \\
&\leq \frac{T}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \leq \frac{T^2}{2n} \longrightarrow 0. \quad as\ n \to \infty
\end{aligned}$$

因此$H_t^{(n)}$逼近B_s。由Ito积分的定义

$$\begin{aligned}
\int_0^T B_s dB_s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i^n} \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2}(B_{t_{i+1}^n}^2 - B_{t_i^n}^2) - (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}^n}^2 - B_{t_i^n}^2) - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \\
&= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2.
\end{aligned}$$

极限均为L^2意义下。我们已经证明过L^2意义下，布朗运动的二次变差为T，因此

$$\int_0^T B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T.$$

注. 我们在计算 $\int_0^T B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T$ 时，逼近B_s的简单阶梯序列是取划分左端点的值

$$H_t^{(n)} \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i^n} \mathbf{1}_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}.$$

其中$\{t_i^n = \frac{iT}{n}, i=0,1,...,n\}_{n\geq 1}$，那么

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_T[B] = \int_0^T B_s \mathrm{d}B_s &\triangleq \lim_{n\to\infty}\int_0^T H_t^{(n)} dB_t \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}^n}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right), L^2\end{aligned}$$

一个自然的问题是，能否像RS积分那样取中间的值，或者右端点的值。我们下面考虑取右端点的情况：

$$J_T \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}^n}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)$$

我们已经证明：

$$\int_0^T B_s \mathrm{d}B_s \triangleq \lim_{n\to\infty} I_T = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T.$$

其中

$$I_T \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i^n}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}(J_T - I_T) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 = T.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} J_T = \frac{1}{2}B_T^2 + \frac{1}{2}T$$

我们再考虑一个中间值的情况，定义

$$S_T \triangleq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_{t_{i+1}^n} + B_{t_i^n}}{2}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right) = \frac{1}{2}[J_T + I_T]$$

那么Stratonovich(斯特拉托诺维奇)随机积分定义为

$$\mathcal{S}_T[B] = \int_0^T B_s \circ \mathrm{d}B_s \triangleq \lim_{n\to\infty} S_T = \frac{1}{2}B_T^2, \quad L^2$$

因此，从以上例子可以看出，对于随机积分并不是非要在取左端点作为“代表点” 才能保证收敛性的，也可以在其它位置取点，但其求和的极限是不同的。

我们注意到，经过修正的Stratonovich随机积分的结果类似于微积分中的黎曼积分的结果，反而取左端点的Itô积分会多出来一项，那么取左端点逼近定义的随机积分又有什么好处

呢？这是由于Itô积分是鞅，在计算时会带来更多好处。我们接下来会讲Itô积分的性质，主要是鞅性，以及Itô积分计算时的Itô公式，但是Stratonovich随机积分在流形上的随机分析中具有更广泛的应用。